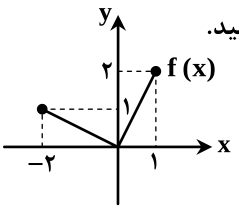
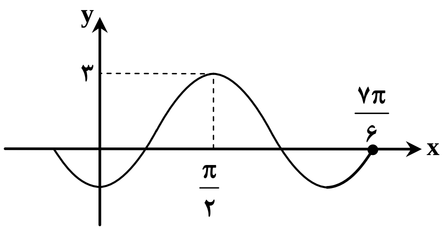
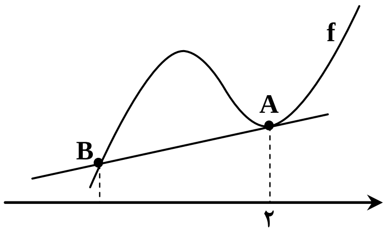
ردیف		نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید. الف) نمودار تابع $y=x^3$ در بازهٔ $(0,1)$، پایین‌تر از نمودار تابع $y=x^2$ قرار دارد. ب) مقدار مشتق دوم تابع $y=\cos x$ در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{3}$، برابر $\frac{1}{2}$ است.	۰/۵
۲	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. الف) اگر $(\frac{1}{2})^{2x-1} \le (\frac{1}{2})^{x+1}$، آنگاه محدودهٔ x به‌صورت .... است. ب) خط .... مماس قائم بر منحنی تابع $f(x)=x\sqrt[3]{x-1}$ است.	۰/۷۵
۳	نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت زیر است. الف) نمودار تابع $g(x)=-f(1-\frac{x}{2})$ را مرحله به مرحله رسم کنید و سپس دامنهٔ تابع $g(x)$ را تعیین کنید. ب) بزرگ‌ترین بازه‌ای را تعیین کنید که تابع $g(x)$ در آن اکیداً نزولی است.  	۱/۵
۴	چندجمله‌ای $f(x)=x^3+ax^2+8x+2a$ را در نظر بگیرید. مقدار a را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $f(x-1)$ بر $x-2$ بخش‌پذیر باشد.	۱
۵	قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a\cos bx+c$ به‌صورت زیر است. مقادیر a، b و c را به‌دست آورید.  	۱/۵
۶	معادلهٔ $\sin 3x+\sin 2x=0$ را حل کنید و جواب‌های آن را در بازهٔ $(0,\pi)$ به‌دست آورید.	۱/۵
۷	حاصل حدهای زیر را در صورت وجود به‌دست آورید. ([ ]، نماد جزءصحیح است.) الف) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{[x]}{x-\lvert x\rvert}$ ب) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1+\sin x}{x}$ پ) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^2-1}{x^3-2x^2+1}$	۱/۵
۸	الف) مجانب‌های قائم و افقی تابع $f(x)=\frac{x^2-1}{x^3+2x}$ را به‌دست آورید. ب) نمودار تابع f را در اطراف مجانب قائم آن رسم کنید.	۱/۵

ردیف		نمره
۹	مشتق‌پذیری تابع $f(x)=x\sqrt{x^2-4x+4}$ را در $x=2$ بررسی کنید.	۱/۵
۱۰	برای تابع f در شکل زیر، روابط $f'(2)=\frac{1}{2}$ و $f(2)=2$ برقرار است. اگر مختصات نقطهٔ B به‌صورت $(-2a,a)$ باشد، مقدار a را بیابید. 	۱
۱۱	مشتق توابع زیر را به‌دست آورید. (لازم به ساده کردن نیست.) الف) $f(x)=(9x-2)^3\sqrt{x}$ ب) $f(x)=2\sin^3 x+\tan\frac{1}{x}$	۲/۲۵
۱۲	آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=x^2-3x+a$ در بازهٔ $[0,4]$، دو واحد از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x=a$ بیشتر است. مقدار a را بیابید.	۰/۷۵
۱۳	در کره‌ای به شعاع $2\sqrt{3}$، یک استوانه به ارتفاع $2h$ محاط کرده‌ایم. مقدار h را طوری تعیین کنید که حجم استوانه بیشترین مقدار ممکن باشد.	۱
۱۴	طول نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=(x-2)(x+4)^2$ را بیابید.	۱
۱۵	مقادیر a و b را طوری به‌دست آورید که نقطهٔ $A(1,2)$ در تابع $f(x)=x^4+ax^3-9x^2+b$، نقطهٔ عطف باشد.	۱
۱۶	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\frac{2x-1}{x+2}$ را رسم کنید.	۱/۷۵

موفق باشید

گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

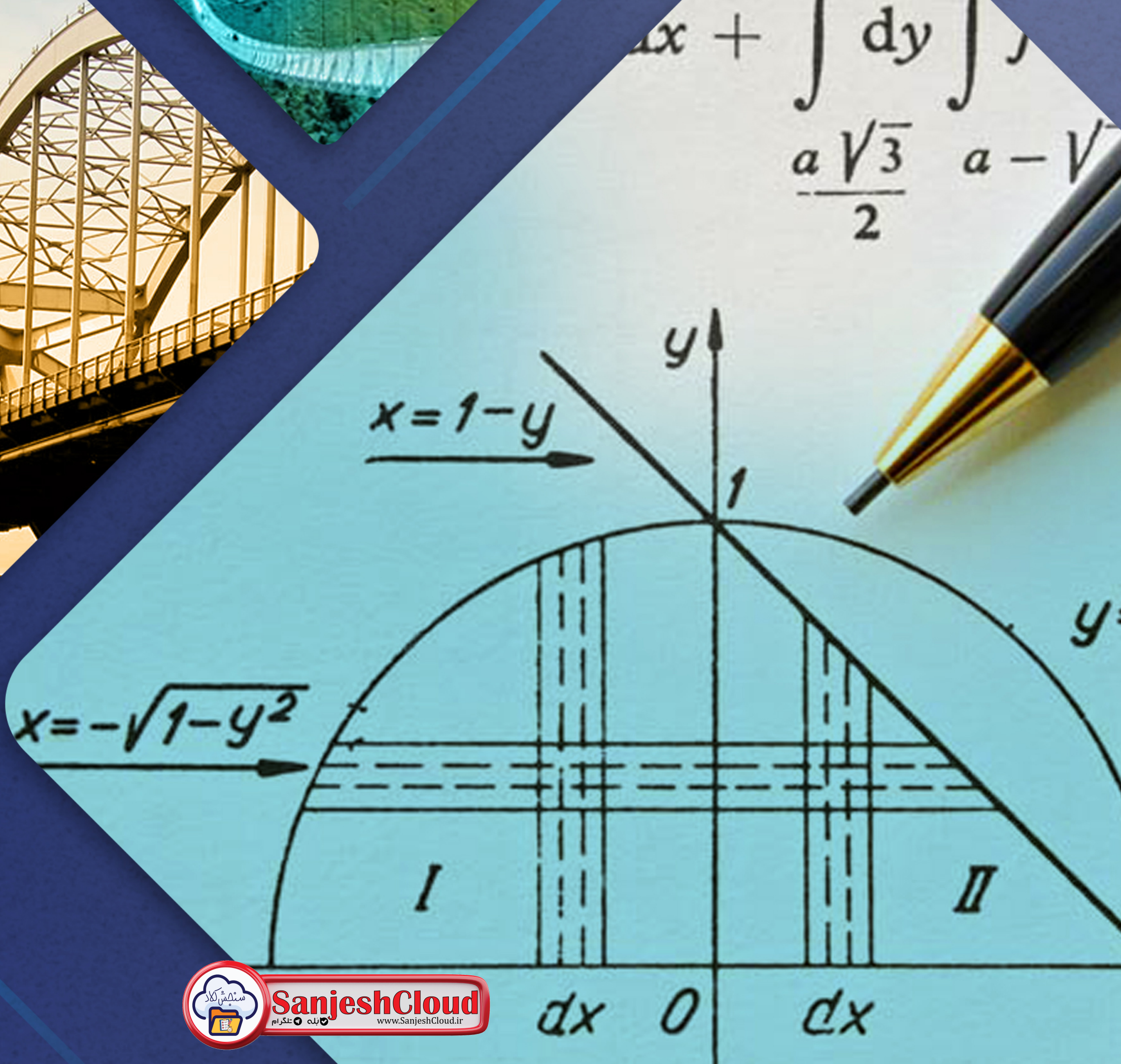
ویژهٔ پایهٔ دوازدهم

اردیبهشت ۱۴۰۴

دفترچه پاسخ تشریحی

ارزشیابی تشریحی مرحله ۴

حسابان ۲ (رشته ریاضی و فیزیک)



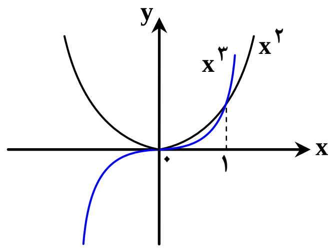
۱۴۰۳_۱۴۰۴

۱-

الف) درست

راه‌حل اول:

با رسم هریک از توابع $y=x^3$ و $y=x^2$، داریم:



راه‌حل دوم:

نکته: اگر $0<x<1$ باشد و m و n اعداد طبیعی باشند به‌طوری که $m>n$، آنگاه $x^m<x^n$.

با توجه به نکته، نمودار تابع $y=x^3$ در بازهٔ $(0,1)$، پایین‌تر از نمودار تابع $y=x^2$ است.

ب) نادرست

نکته: مشتق تابع $y=f(x)$ را با نماد $y'=f'(x)$ نمایش می‌دهیم. به همین ترتیب اگر تابع مشتق، مشتق‌پذیر باشد، مشتق مرتبهٔ دوم $y=f(x)$ را با $y''=f''(x)$ نمایش می‌دهیم و برای محاسبه آن، از تابع $y'=f'(x)$ نسبت به x مشتق می‌گیریم.

ابتدا y'' را به‌دست می‌آوریم: $y=\cos x \xrightarrow{\text{مشتق اول}} y'=-\sin x \xrightarrow{\text{مشتق دوم}} y''=-\cos x$

حالا $x=\frac{\pi}{3}$ را در y'' جای‌گذاری می‌کنیم: $y''=-\cos(\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{2}$

۲-

الف) $x\ge 2$ یا $[2,+\infty)$

نکته: تابع f را در یک مجموعه، اکیداً نزولی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این مجموعه که $a<b$، آنگاه $f(a)>f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً نزولی است. با حرکت روی نمودار (از چپ به راست). همواره روبه پایین خواهیم رفت. با توجه به اینکه تابع $f(x)=(\frac{1}{2})^x$، اکیداً نزولی است، پس داریم:

$$(\frac{1}{2})^{2x-1}\le(\frac{1}{2})^{x+1} \Rightarrow 2x-1\ge x+1 \Rightarrow x\ge 2$$

ب) $x=1$

نکته: اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و در این نقطه مشتق چپ و راست نامتناهی داشته باشد، در این صورت خط $x=a$ را «مماس قائم» بر منحنی f در نقطهٔ $(a,f(a))$ می‌نامیم. بدیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

۳-

الف)

نکته: برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، اگر $k>0$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به‌سمت چپ انتقال دهیم و برای $k<0$، این انتقال به اندازهٔ $|k|$ واحد به‌سمت راست انجام می‌شود.

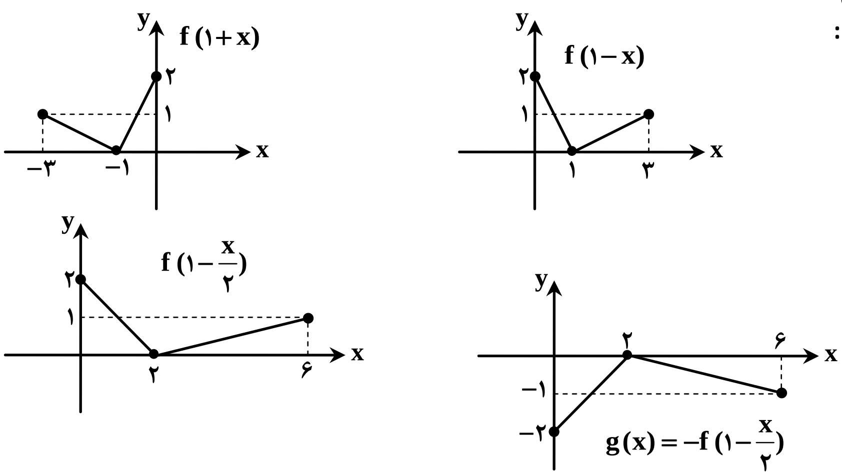
نکته: اگر طول نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y=f(-x)$، قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور عرض‌ها است.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $k>1$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به‌دست می‌آید و اگر $0<k<1$ باشد، این نمودار از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود.

نکته: اگر عرض نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=-f(x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y=-f(x)$، قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور طول‌ها است.

با توجه به نکات و نمودار تابع $f(x)$، داریم:



با توجه به نمودار تابع $g(x)$، $D_g=[0,6]$ است.

ب)

نکته: تابع f را در یک مجموعه، اکیداً نزولی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این مجموعه که $a<b$، آنگاه $f(a)>f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً نزولی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه پایین خواهیم رفت.

تابع g در بازهٔ $[۲,۶]$ اکیداً نزولی است.

۴-

راه‌حل اول:

نکته (قضیه): باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$، عبارت است از: $r(x)=f(\frac{-b}{a})$.

با توجه به نکته، داریم:

$$x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow f(x-۱)=f(۱)=۰ \Rightarrow ۱+a+۸+۲a=۰ \Rightarrow ۳a+۹=۰ \Rightarrow a=-۳$$

راه‌حل دوم:

ابتدا ضابطهٔ $f(x-۱)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x-۱)=(x-۱)^۳+a(x-۱)^۲+۸(x-۱)+۲a$$

$$f(x-۱)=x^۳+(a-۳)x^۲+(۱۱-۲a)x+۳a-۹$$

با توجه به اینکه $f(x-۱)$ بر $x-۲$ بخش‌پذیر است، پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x-۱)$ بر $x-۲$ را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^۳+(a-۳)x^۲+(۱۱-۲a)x+۳a-۹ & x-۲ \\
- & x^۳-۲x^۲ & x^۲+(a-۱)x+۹ \\
\hline
 & (a-۱)x^۲+(۱۱-۲a)x & \\
- & (a-۱)x^۲-۲(a-۱)x & \\
\hline
 & ۹x+۳a-۹ & \\
- & ۹x-۱۸ & \\
\hline
 & ۳a+۹ &
\end{array}$$

حال باقی‌مانده را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$۳a+۹=۰ \Rightarrow a=-۳$$

۵-

نکته: توابع $y=a\text{Sin}bx+c$ و $y=a\text{Cos}bx+c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$ و مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دورهٔ تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ هستند.

تابع f روی محور yها، مینیمم دارد، پس $a<۰$ است.

با توجه به شکل، دورهٔ تناوب تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$T=۲\times\frac{\pi}{۲}=\pi \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|}=\pi \Rightarrow |b|=۲ \Rightarrow b=\pm۲$$

همچنین از نمودار تابع، مشخص است که:

$$\max=c+|a| \xrightarrow{a<۰} c-a=۳$$

با توجه به نمودار تابع، داریم:

$$f(\frac{۷\pi}{۶})=۰ \Rightarrow a\cos(\frac{۷\pi}{۶}b)+c=۰ \xrightarrow{b=\pm۲} a\cos(\pm\frac{۷\pi}{۳})+c=۰ \xrightarrow{\cos(\pm\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۲}} \frac{a}{۲}+c=۰ \xrightarrow{\times۲} a+۲c=۰$$

$$\begin{cases} c-a=۳ \\ a+۲c=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-۲ \\ c=۱ \end{cases}$$

۶-

نکته: جواب‌های کلی معادلهٔ $\text{Sin}\,x=\text{Sin}\,\alpha$ به‌صورت $x=۲k\pi+\alpha$ و $x=(۲k+۱)\pi-\alpha$ می‌باشد که $k\in Z$.

با توجه به نکته، داریم:

$$\sin ۳x=-\sin ۲x=\sin(-۲x) \Rightarrow \begin{cases} ۳x=-۲x+۲k\pi \\ ۳x=\pi+۲x+۲k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۲k\pi}{۵} \quad , \quad k\in Z \\ x=\pi+۲k\pi \quad , \quad k\in Z \end{cases}$$

با مقداردهی به k $(k\in Z)$، جواب‌های معادله در بازهٔ $(۰,\pi)$ برابر $\frac{۲\pi}{۵}$ و $\frac{۴\pi}{۵}$ است.

-۷

الف)

نکته: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq ۰$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=۰$ ، آنگاه:

۱) اگر $L>۰$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

۲) اگر $L<۰$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

۳) اگر $L>۰$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

۴) اگر $L<۰$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

با توجه به نکته، داریم:

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{[x]}{x-|x|}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{-۱}{۲x}=+\infty$$

ب)

نکته: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq ۰$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=۰$ ، آنگاه:

۱) اگر $L>۰$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

۲) اگر $L<۰$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

۳) اگر $L>۰$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

۴) اگر $L<۰$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

با توجه به نکته، داریم:

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱+\sin x}{x}=\lim_{x\to ۰^+}\left(\frac{۱}{x}+\frac{\sin x}{x}\right)=+\infty+۱=+\infty$$

پ)

نکته: به‌طور کلی حد هر چندجمله‌ای به‌صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_۱x+a_۰$ در $\pm\infty$ برابر حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است یعنی:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_۱x+a_۰)=\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n$$

با توجه به نکته، داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^۲-۱}{x^۳-۲x^۲+۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^۲}{x^۳}=۰$$

-۸

نکته (تعریف): خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند، هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to a^+}f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to a^-}f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to a^+}f(x)=-\infty$$

نکته: خط $y=L$ را مجانب افقی نمودار $y=f(x)$ می‌نامیم، به شرطی که حداقل یکی از دو شرط $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ یا $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$ برقرار باشد.

الف) مجانب‌های قائم و افقی تابع $f(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

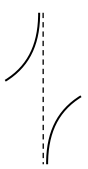
مجانب قائم $x^۳+۲x=۰\Rightarrow x(x^۲+۲)=۰\Rightarrow x=۰$

$\lim\limits_{x\to ۰^-}f(x)=+\infty$

مجانب افقی $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=۰\Rightarrow y=۰$

$\lim\limits_{x\to ۰^+}f(x)=-\infty$

ب)



-۹

نکته (تعریف): مشتق راست و مشتق چپ تابع f در $x=a$ را با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\quad,\quad f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

یا به‌طور معادل (تعریف دوم مشتق):

$$f'_+(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\quad,\quad f'_-(a)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

روش اول:

ابتدا تابع $f(x)$ را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=x\sqrt{(x-2)^2}\xrightarrow{\sqrt{a^2}=|a|}f(x)=x|x-2|$$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x|x-2|}{x-2}$$

$$\begin{cases}f'_+(2)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x(x-2)}{x-2}=2\\ f'_-(2)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-x(x-2)}{x-2}=-2\end{cases}$$

چون $f'_+(2)\neq f'_-(2)$، پس f در $x=2$ مشتق‌پذیر نیست.

روش دوم:

$$f(x)=x\sqrt{x^2-4x+4}\xrightarrow{\sqrt{a^2}=|a|}f(x)=x|x-2|$$

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$\begin{cases}f'_+(2)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{(2+h)|h|}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}2+h=2\\ f'_-(2)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{(2+h)|h|}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}(-2-h)=-2\end{cases}$$

چون $f'_+(2)\neq f'_-(2)$، پس f در $x=2$ مشتق‌پذیر نیست.

-۱۰

نکته: مقدار مشتق تابع در a برابر با شیب خط مماس بر نمودار در نقطه‌ای به‌طول a است.

با توجه به نکته و اینکه $f'(2)=\frac{1}{2}$ است، پس شیب خط مماس برابر $\frac{1}{2}$ است.

راه‌حل اول:

با توجه به دو نقطهٔ $A(2,2)$ و $B(-2a,a)$ و رابطهٔ شیب خط، داریم:

$$\frac{1}{2}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{2-a}{2+2a}\Rightarrow 4-2a=2+2a\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

راه‌حل دوم:

معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم: $y-2=\frac{1}{2}(x-2)$

می‌دانیم نقطهٔ B روی خط مماس است، پس مختصات آن در معادلهٔ خط صدق می‌کند، داریم:

$$\begin{cases}x=-2a\\ y=a\end{cases}\Rightarrow a-2=\frac{1}{2}(-2a-2)\Rightarrow a-2=-a-1\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

-۱۱

نکته: اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه توابع kf ($k\in R$)، $f\pm g$، fg و $\frac{f}{g}$ ($g(a)\neq 0$) نیز در $x=a$ مشتق‌پذیرند و داریم:

۱) $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$

۲) $(kf)'(a)=kf'(a)$

۳) $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$

۴) $(\frac{f}{g})'(a)=\dfrac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

نکته: اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $x>0$، آنگاه $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

نکته: اگر f تابعی برحسب u و u تابعی از x باشد:

$$y=f(u) \Rightarrow y'=u'f'(u)$$

الف) $f'(x)=3\times 9(9x-2)^2\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\times(9x-2)^3$

ب) $f'(x)=(3)(2)(\sin^2 x)(\cos x)+(\frac{-1}{x^2})(1+\tan^2\frac{1}{x})$

-۱۲

نکته: آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه‌ای مانند $[a,a+h]$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازهٔ } [a,a+h] = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

نکته: آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در نقطهٔ } x=a = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

با توجه به نکات، داریم:

$$\text{آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ } [0,4] = \frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{(a+4)-a}{4}=1$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در } x=a = f'(a) \xrightarrow{f'(x)=2x-3} f'(a)=2a-3$$

با توجه به فرض سؤال، داریم:

$$1=(2a-3)+2 \Rightarrow a=1$$

-۱۳

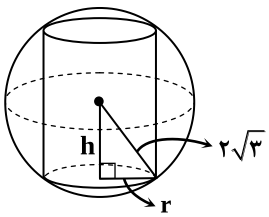
نکته: برای یافتن نقاط اکسترمم مطلق ابتدا این نقاط بحرانی را مشخص می‌نماییم. در این صورت از بین تمام نقاط بحرانی و نقاط انتهایی بازه، نقطه یا نقاطی که بیشترین مقدار تابع در آن‌ها اتفاق می‌افتد نقاط ماکزیمم مطلق تابع و مقدار تابع در این نقاط مقدار ماکزیمم مطلق تابع است. همچنین در بین نقاط مذکور نقطه یا نقاطی که کمترین مقدار تابع در آن‌ها اتفاق می‌افتد نقاط مینیمم مطلق تابع و مقدار تابع در این نقاط مقدار مینیمم مطلق تابع است.

مطابق شکل مقابل، داریم:

$$r^2+h^2=(2\sqrt{3})^2 \Rightarrow r^2+h^2=12$$

$$V=\pi r^2(2h)=2\pi r^2 h$$

$$r^2=12-h^2$$



راه‌حل اول:

$$V(h)=2\pi(12-h^2)h \Rightarrow V(h)=2\pi(12h-h^3) \Rightarrow V'(h)=2\pi(12-3h^2)$$

حال با حل معادلهٔ $V'(h)=0$، طول نقطهٔ بحرانی را به‌دست می‌آوریم:

$$2\pi(12-3h^2)=0 \Rightarrow 3h^2=12 \Rightarrow h=\pm 2 \xrightarrow{h>0} h=2$$

راه‌حل دوم:

$$h^2=12-r^2 \Rightarrow h=\sqrt{12-r^2} \quad (*)$$

$$V(r)=2\pi r^2(\sqrt{12-r^2}) \Rightarrow V'(r)=2\pi(2r\sqrt{12-r^2}+\frac{-2r}{2\sqrt{12-r^2}}(r^2))$$

حال با حل معادلهٔ $V'(r)=0$، طول نقطهٔ بحرانی را به‌دست می‌آوریم:

$$2r\sqrt{12-r^2}=\frac{2r^3}{2\sqrt{12-r^2}} \Rightarrow 2(12-r^2)=r^2 \Rightarrow 3r^2=24 \Rightarrow r=\pm\sqrt{8} \xrightarrow{r>0} r=\sqrt{8}$$

$$\xrightarrow{(*)} h=\sqrt{12-(\sqrt{8})^2}=\sqrt{4}=2$$

۱۴-

نکته: برای یافتن طول نقاط اکسترمم نسبی توابع چندجمله‌ای، معادلهٔ $f'(x)=۰$ را حل می‌کنیم.

ابتدا $f'(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=(x+۴)^۲+۲(x+۴)(x-۲)=(x+۴)(x+۴+۲x-۴)=۳x(x+۴)$$

ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=۰$، نقاط اکسترمم نسبی تابع هستند:

$$f'(x)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=-۴ \end{cases}$$

۱۵-

نکته (تعریف): فرض کنیم تابع f در نقطهٔ $x=c$ پیوسته است. در این صورت نقطهٔ $(c,f(c))$ نقطهٔ عطف تابع f است، هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشند:

الف) نمودار f در نقطهٔ $(c,f(c))$ خط مماس داشته باشد.

ب) جهت تقعر f در نقطهٔ $(c,f(c))$ تغییر کند.

ابتدا مشتق اول و سپس مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۴x^۳+۳ax^۲-۱۸x \Rightarrow f''(x)=۱۲x^۲+۶ax-۱۸$$

نقطهٔ $x=۱$، طول نقطهٔ عطف است، داریم:

$$f''(۱)=۰ \Rightarrow ۱۲+۶a-۱۸=۰ \Rightarrow a=۱$$

مختصات نقطهٔ عطف، در تابع صدق می‌کند:

$$f(x)=x^۴+x^۳-۹x^۲+b \xrightarrow{f(۱)=۲} ۱+۱-۹+b=۲ \Rightarrow b=۹$$

۱۶-

نکته: به‌طور کلی برای رسم نمودار یک تابع، همه یا برخی از مراحل زیر را انجام می‌دهیم و با توجه به اطلاعات به‌دست آمده جدول رفتار تابع را تشکیل می‌دهیم و به کمک آن نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

۱) دامنهٔ تابع را مشخص می‌کنیم.

۲) محل تلاقی نمودار با محورهای مختصات را مشخص می‌کنیم (در صورت وجود).

۳) f' را به‌دست می‌آوریم و با تعیین علامت آن بازه‌هایی که f بر آن‌ها صعودی یا نزولی است را مشخص می‌کنیم.

۴) نقاط بحرانی و اکسترمم‌های نسبی تابع را به‌دست می‌آوریم (در صورت وجود).

۵) f'' را به‌دست می‌آوریم و با تعیین علامت آن جهت تقعر تابع در بازه‌های مختلف را مشخص می‌کنیم.

۶) نقطهٔ عطف تابع را مشخص می‌کنیم (در صورت وجود).

۷) رفتار تابع را برای مقادیر بسیار بزرگ x و بسیار کوچک x مشخص می‌کنیم (در صورت وجود).

۸) معادلهٔ مجانب‌های تابع را به‌دست می‌آوریم (در صورت وجود).

۹) تنظیم یک جدول که با خلاصه کردن اطلاعات توابع f، f' و f'' در آن تشخیص چگونگی شکل نمودار آسان‌تر شود.

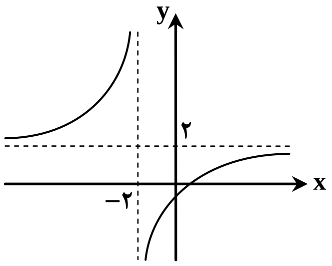
۱۰) رسم نمودار تابع با استفاده از اطلاعات قسمت‌های قبل.

۱۱) در صورت نیاز از نقاط کمکی هم استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} x=-۲ & \text{مجانب قائم} \\ y=۲ & \text{مجانب افقی} \end{cases}$$

$$f'(x)=\frac{۵}{(x+۲)^۲}$$

$$f''(x)=\frac{-۱۰}{(x+۲)^۳}$$



x	$-\infty$		-۲		$+\infty$
f'		+		+	
f''		+		−	
f	$y=۲$ ↗ $+\infty$			$-\infty$ ↗ $y=۲$	